Tentamen Numerieke Wiskunde 1
22 februari 2010

Bij dit tentamen mag een (grafische) rekemachine worden gebruikt.
Alle antwoorden dienen te worden gemotiveerd.
Gratis: $\boxed{10}$
Practica $\boxed{10}$: Voor de 5 computerpractica zijn maximaal 2 punten per practicum te verdienen.

1. We willen het nulpunt bepalen van $f(x) = e^x - x^2$. Uit een plaatje blijkt dat het snijpunt ligt bij $x \approx -0.7$.

   (a) $\boxed{6}$ Maak een schets van de functie op [-1,0] en schets daarin ook de benadering die de Newton methode gebruikt in de eerste stap wanneer de startwaarde $x_0 = 0$ is. Stel ook de vergelijking op en geef x_1.

   (b) $\boxed{4}$ Wat is het verschil tussen de Newton methode en de Secant methode en welk voordeel heeft de Secant methode voor de gebruiker? Maak ook een schets van een stap met de Secant methode.

2. Stel $f_1(x, y) = e^x + y - 1$, $f_2(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Het stelsel $f_1(x, y) = 0$, $f_2(x, y) = 0$ wordt geprobeerd op te lossen met de successieve substitutie methode $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{g}(\mathbf{x}_n)$ dat gebruik maakt van het iteratie voorschrift

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{1}{2} f_1(x, y) + \frac{1}{4} f_2(x, y) \\ y_{n+1} &= y_n - \frac{1}{4} f_2(x, y) \end{aligned}$$

   met een startwaarde $(x_0,\ y_0)$ dat voldoende dicht bij de oplossing $(0, 1)$ ligt.

   (a) $\boxed{6}$ Geef de Jacobiaan matrix die bij $\mathbf{g}$ hoort en toon aan dat deze matrix in het nulpunt gegeven wordt door een half identiteitsmatrix.

   (b) $\boxed{4}$ Wat is de asymptotische convergentiesnelheid van deze methode?

3. Gegeven is de functie $f(x) = e^{2x}$ en de twee steunpunten $x = 0$ en $x = 1$. De exacte waarde van $f(x)$ in het punt $x = 1/2$ is $f(1/2) = e$.

   (a) $\boxed{4}$ Geef het interpolerende polynoom op basis van de twee steunpunten $x = 0$ en $x = 1$ (lineaire interpolatie). Bepaal hiermee de geinterpoleerde waarde in het punt $x = 1/2$.

   (b) $\boxed{5}$ Geef de maximale interpolatiefout op het interval [0 1] volgens de hierop betrekking hebbende stelling. Is aan alle voorwaarden van deze stelling voldaan?

   (c) $\boxed{4}$ Bepaal de daadwerkelijk optredende interpolatiefout in $x = 1/2$ en vergelijk deze met de maximale interpolatiefout (onderdeel b). Geef twee redenen waarom de echte interpolatiefout in $x = 1/2$ kleiner is dan de maximale.

Vervolg aan ommezijde!

4. (a) $\boxed{5}$ De rechthoekregel voor het numeriek berekenen van een integraal heeft een derde orde locale (afbreek-)fout. Toon aan dat de samengestelde methode globaal een tweede orde nauwkeurigheid heeft. Welke eisen gelden hierbij voor de functie waarover wordt geintegreerd?

   (b) $\boxed{4}$ Hoe bepaal je de q-factor bij een (globaal) vierde orde methode? Leg uit wat je met deze factor kunt doen.

   (c) $\boxed{5}$ Leg uit hoe je een foutschatting kunt maken bij een (globaal) vierde orde methode. Geef hierbij ook de te gebruiken formule(s).

5. Beschouw op [0 5] de differentiaalvergelijking $y'(x) = -y^2$, $y(0) = 1$. Met een tweede orde methode is op twee rekenroosters (roosterafstanden $\delta x = 0.5$ en $\delta x = 0.25$) de numerieke oplossing bepaald. De numerieke oplossing is weergegeven in onderstaande tabel:

x_n	$\delta x = 0.5$	$\delta x = 0.25$
1.0	0.483144	0.496021
2.0	0.323610	0.330991
3.0	0.243890	0.248521
4.0	0.195838	0.198991
5.0	0.163658	0.165937

   (a) $\boxed{4}$ Geef een foutschatting voor de oplossing op het fijnste rooster in het punt $x = 4.0$.

   (b) $\boxed{4}$ Geef een verbeterde oplossing (extrapolatie) voor de oplossing op het fijnste rooster in het punt $x = 4.0$.

   (c) $\boxed{5}$ Toepassen van de impliciete Euler methode geeft een impliciete uitdrukking voor de oplossing y_{n+1} in het roosterpunt x_{n+1}. Is het mogelijk deze uitdrukking te herschrijven tot een expliciete uitdrukking voor y_{n+1}? Zo ja, geef deze uitdrukking.

6. (a) $\boxed{5}$ Maak een Cholesky ontbinding (is LL^T-ontbinding) van de matrix

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

   Welke eigenschap van de matrix zorgt ervoor dat het voor deze matrix mogelijk is en niet in het geval dat het getal rechtsonder vervangen wordt door een nul?

   (b) $\boxed{5}$ Toon aan dat in het geval van een symmetrisch positief definiete matrix A de oplossing van het stelsel $Ax = b$ ook gevonden kan worden door het minimaliseren van $\frac{1}{2}(y, Ay) - (y, b)$.

7. Beschouw op [0 1] voor $u(x, t)$ de diffusievergelijking $\partial u/\partial t = \kappa \partial^2 u/\partial x^2$, met $\kappa = 10^{-3}$, en beginvoorwaarden $u(x, 0) = 0$ en randvoorwaarden $u(0, t) = 0$ en $u(1, t) = \sin^2(t)$.

   (a) $\boxed{5}$ Geef het stelsel gewone diffentiaalvergelijkingen die volgt als voor $\partial^2 u/\partial x^2$ de standaard centrale discretisatie wordt gebruikt. N.B. Let in het bijzonder op de randvoorwaarden.

   (b) $\boxed{5}$ Geef de differentie vergelijkingen die ontstaan als de expliciete Euler methode wordt toegepast op het in het vorige onderdeel gevonden stelsel. Wat is de maximale tijdstap als een rooster wordt gebruikt met $\Delta x = 1/200$?

Totaal $\boxed{100}$